DIOFANTSKE JEDNADŽBE

Diofantske jednadžbe dobile su naziv po starogrčkom matematičaru Diofantu iz Aleksandrije (oko 250. g. n. e.). O životu Diofanta malo se danas zna. Od njegovog djela Arithmetica koje je imalo 13 knjiga, sačuvano je samo prvih šest. Bavio se isključivo teorijom brojeva. Prvi je koristio algebarske oznake.

Diofantskom jednadžbom nazivamo algebarsku jednadžbu s dvjema ili više nepoznanica s cjelobrojnim koeficijentima kojoj se traže cjelobrojna rješenja.

Promatraju se i sustavi takvih jednadžbi pri čemu se uzima da je broj nepoznanica veći od broja jednadžbi.

Diofantske jednadžbe mogu biti linearne i nelinearne.

Linearnom diofantskom jednadžbom s n nepoznanica nazivamo jednadžbu oblika

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = m$$

gdje su $x_1, x_2, ..., x_n$ nepoznanice, te $a_1, a_2, ..., a_n, m$ cjelobrojni koeficijenti.

<u>Primjer</u>: 3x + 7y = 8 linearna diofantska jednadžba s dvije nepoznanice
2x – 4y + 5z = 1 linearna diofantska jednadžba s tri nepoznanice

Nelinearne diofantske jednadžbe su one diofantske jednadžbe u kojima se nepoznanice pojavljuju u članovima višeg reda.

<u>Primjer :</u> xy + x – 3y – 6 = 0 diofantska jednadžba drugog reda s dvije nepoznanice
$x^2 + y^2 = z^2$ diofantska jednadžba drugog reda s tri nepoznanice
$x^3 - y^3 = 1$ diofantska jednadžba trećeg reda s dvije nepoznanice

Za uspješno rješavanje diofantskih jednadžbi korisno je znati neke jednostavne činjenice o brojevima.

1. Paran prirodan broj je oblika 2k, a neparan broj oblika 2k-1 , gdje je k prirodan broj
2. Umnožak tri uzastopna prirodna broja djeljiv je sa 6
3. Umnožak dva uzastopna parna broja djeljiv je s 8
4. Kvadrati prirodnih brojeva ne mogu završavati s 2, 3, 7 i 8
5. Kvadrat svakog parnog prirodnog broja je oblika 4k, gdje je k prirodan broj
6. Kvadrat svakog neparnog prirodnog broja je oblika 8k+1 , gdje je k prirodan broj
7. Svaki prost broj veći od 3 je oblika 6k – 1 ili 6k+1
8. Kvadrat svakog prostog broja većeg od 3 je oblika 12k + 1
9. Ako je n^2 paran broj, onda je i n paran broj
10. Ako je n^2 neparan broj onda je i n neparan
11. Zbroj i razlika dvaju cijelih brojeva iste je parnosti

LINEARNE DIOFANTSKE JEDNADŽBE S DVIJE NEPOZNANICE

Jednadžba oblika ax + by = c je linearna diofantska jednadžba s dvije nepoznanica gdje su a,b,c $\in$ **Z**, $a^2 + b^2 \neq 0$

Ako je slobodni član c = 0 , kažemo da je pripadna jednadžba homogena. Takva jednadžba ima uvijek beskonačno mnogo rješenja.

TEOREM :

a) Diofantska jednadžba ax + by = c, gdje su a,b,c $\in$ **Z**, $a^2 + b^2 \neq 0$ ima cjelobrojna rješenja ako i samo ako D(a,b) dijeli c.

b) Ako su x_0, y_0 rješenja te jednadžbe onda su sva rješenja oblika

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t , \quad y = y_0 - \frac{a}{d}t, \ t \in \mathbf{Z}$$

gdje je d = D(a,b).
Rješenje (x_0, y_0) naziva se partikularno rješenje diofantske jednadžbe.

PRIMJER 1. Riješimo u skupu cijelih brojeva diofantsku jednadžbu 2x + 13y = 0.

Rj. Izrazimo jednu nepoznanicu preko druge. $x = -\frac{13}{2}y$ Kako je x cijeli broj, rješenje y mora biti djeljivo s 2 , tj. y je oblika y = 2t , gdje je t cijeli broj.

Tada je $x = -\frac{13}{2} \cdot 2t = -13t$. Dakle, rješenje diofantske jednadžbe 2x + 13y = 0 su parovi (-13t, 2t) , t ∈ **Z**.

npr. (0,0), (-13,2), (-26,4) ,….

PRIMJER 2. Riješimo u skupu cijelih brojeva diofantsku jednadžbu 5x + 3y = 78 .

Rj. D(5,3) = 1 pa jednadžba ima cjelobrojna rješenja. Rješenja su $x = x_0 + 3t$, $y = y_0 - 5t$, $t \in$ **Z**.

Metodom pokušaja odredimo partikularna rješenja: $x_0 = 15,\ y_0 = 1$

Rješenja diofantske jednadžbe su : x = 15 + 3t, y = 1 – 5t , t ∈ **Z**

npr. (15,1), (12,6), (18,-4),…

PRIMJER 3. Koliko karata za koncert od po 30 kn i 50 kn možemo kupiti za 1490 kn ? Koliko rješenja ima zadatak ?

Rj. x : broj karata po 30 kn y : broj karata po 50 kn 30x + 50y = 1490

D(30,50) = 10 pa su rješenja $x = x_0 + \frac{50}{10}t = x_0 + 5t,\quad y = y_0 - \frac{30}{10}t = y_0 - 3t$, $t \in$ **Z**

Partikularna rješenja su $x_0 = 3,\ y_0 = 28$. Rješenja diofantske jednadžbe su : x= 3 + 5t, y = 28 – 3t , t ∈ **Z**

Kako 1490 nije djeljivo ni sa 30 ni sa 50 mora biti x > 0 i y > 0.

$3 + 5t > 0 \qquad 28 - 3t > 0$

$t > -\frac{3}{5} \qquad t < \frac{28}{3}$ Jednadžba ima rješenja za t = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

Znači zadatak ima 10 rješenja.

PRIMJER 4. Može li se na vagi sa zdjelicama izvagati 28 g, ako se raspolaže s 4 utega od 3g i sa 7 utega od 5 g ? Ako se može, na koliko načina ?

Rj. x : broj utega od 3g $0 < x \le 4$ y: broj utega od 5g $0 < y \le 7$

Odgovarajuća jednadžba je 3x + 5y = 28

Partikularna rješenja su : $x_0 = 6,\ y_0 = 2$, pa su rješenja oblika x = 6 + 5t , y = 2 – 3t , t ∈ **Z**

$$0 < 6 + 5t \le 4 \qquad i \qquad 0 < 2 - 3t \le 7$$

$$-6 < 5t \le -2 \qquad -2 < -3t \le 5$$

$$-\frac{6}{5} < t \le -\frac{2}{5} \qquad -\frac{5}{3} \le t < \frac{2}{3}$$

Jedino rješenje imamo za t = - 1 , x=1 i y=5

Znači sa jednim utegom od 3g i 5 utega po 5 grama možemo izvagati 28 g.

PRIMJER 5. Marko je 1983.god. napunio onoliko godina koliki je zbroj znamenki godine njegova rođenja. Koje je godine rođen Marko ?

Rj. $19\overline{xy}$ x,y $\in \{0,1,2,...9\}$ 1983 - $19\overline{xy}$ = 1+9+x+y

1983 – 1000 – 900 - 10x -y = 19 + x + y

11x + 2y = 73

Partikularna rješenja su $x_0 = 1,\ y_0 = 31$, pa su rješenja x = 1 + 2t , y = 31 – 11t , t $\in$ **Z**

Iz uvjeta $0 \le 1 + 2t \le 9 \quad i \quad 0 \le 31 - 11t \le 9$ dobivamo $-\frac{1}{2} \le t \le 4 \quad i \quad 2 \le t \le \frac{31}{11}$

Jedino rješenje imamo za t = 2 , x = 5 i y = 9

Znači Marko je rođen 1959. godine.

PRIMJER 6. Riješimo u skupu cijelih brojeva jednadžbu : 2x – 4y + 5z = 1

Rj. Zadatak se svodi na diofantsku jednadžbu s dvije nepoznanice. Zapišimo jednadžbu ovako :

2x – 4y = 1 – 5z

$x - 2y = \frac{1-5z}{2}$ Desna strana jednadžbe je cijeli broj ako je 1 – 5z = 2k, $k \in Z$

Opće rješenje jednadžbe 5z + 2k = 1 je z = 1 + 2v, k = - 2 – 5v , $v \in Z$.

Uvrstimo z = 1 + 2v u zadanu jednadžbu. Dobivamo : 2x – 4y = - 4 – 10 v , tj. x – 2y = - 2 – 5v.

Desna strana jednadžbe ovisi o nezavisnom parametru v. Očito je za svaki $v \in Z$:

$x_0 = v\ ,\quad y_0 = 1 + 3v$ pa je opće rješenje ove jednadžbe : x = v - 2u , y = 1 + 3v -u.

Dakle, opće rješenje polazne jednadžbe je : x = v – 2u, y = 1 + 3v – u , z = 1 + 2v , $u, v \in Z$

NELINEARNE DIOFANTSKE JEDNADŽBE

Univerzalna metoda rješavanja tih jednadžbi ne postoji, ali zato postoji niz metoda kojima rješavamo neke specijalne tipove nelinearnih diofantskih jednadžbi.

Neke od metoda su : metoda umnoška
metoda kvocijenta
metoda parnosti
metoda posljednje znamenke

METODA UMNOŠKA - primjenjuje se pri rješavanju diofantskih jednadžbi najmanje drugog stupnja. Sastoji se u tome da se jedna strana jednadžbe zapiše u obliku umnoška cjelobrojnih vrijednosti pa uzimajući u obzir drugu stranu jednadžbe promatramo moguće slučajeve.

PRIMJER 7. Riješimo diofantsku jednadžbu xy + x – 3y – 6 = 0

Rj. xy + x -3y – 6 = 0

x(y+1) – 3(y+1) = 3

(x-3)(y+1) = 3 Mogući slučajevi dani su u tablici :

X - 3	1	- 1	3	- 3
Y + 1	3	- 3	1	- 1

Rješenja su u sljedećoj tablici :

X	4	2	6	0
Y	2	- 4	0	- 2

PRIMJER 8. Riješimo diofantsku jednadžbu $2x^2 + xy - 3y^2 = 17$

Rj.

$$2x^2 + xy - 3y^2 = 17$$
$$2x^2 + 3xy - 2xy - 3y^2 = 17$$
$$2x(x-y) + 3y(x-y) = 17$$
$$(x-y)\,(2x+3y) = 17$$

Mogući slučajevi su : 2x+3y =1, x-y = 17; 2x+3y = - 1, x-y = - 17; 2x+3y = 17, x-y = 1; 2x+3y = - 17, x- y = - 1

Cjelobrojno rješenje dobivamo jedino iz trećeg sustava : x = 4 , y = 3

METODA KVOCIJENTA

PRIMJER 9. Riješimo diofantsku jednadžbu xy + 2y = x

Rj. y(x + 2) = x Za x = - 2 imamo y(-2+2) = - 2 , tj. 0 = - 2 što je nemoguće.

Za x $\neq$ - 2 imamo $y = \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{x+2-2}{x+2} = 1 - \dfrac{2}{x+2}$

Da bi y bio cjelobrojan, izraz $\dfrac{2}{x+2}$ mora biti cjelobrojan.

x + 2 $\in \{1, -1, 2, -2\} \Leftrightarrow x \in \{-1, -3, 0, -4\}$ Odgovarajući y su : y $\in \{-1, 3, 0, 2\}$

Rješenja su : (- 1, - 1), (-3, 3), (0, 0), (- 4, 2)

PRIMJER 10. Nađimo sve dvoznamenkaste brojeve koji su tri puta veći od umnoška svojih znamenaka.

Rj. $\overline{xy}$: traženi dvoznamenkasti broj Mora vrijediti : $\overline{xy} = 3 \cdot x \cdot y$, odnosno 10x + y = 3xy

10x = y(3x – 1) Za x = $\dfrac{1}{3}$ dobiva se da je $\dfrac{10}{3} = 0$ što je nemoguće.

Za x $\neq \dfrac{1}{3}$ imamo $y = \dfrac{10x}{3x-1} = \dfrac{9x-3+x+3}{3x-1} = \dfrac{3(3x-1)+x+3}{3x-1} = 3 + \dfrac{x+3}{3x-1}$

Izraz $\dfrac{x+3}{3x-1}$ mora biti cjelobrojan, pa kako je x $\in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ provjeravamo :

x = 1 $\Rightarrow \dfrac{4}{2} = 2 \Rightarrow y = 5$ $x = 2 \Rightarrow \dfrac{5}{5} = 1 \Rightarrow y = 4$ $x = 3 \Rightarrow \dfrac{6}{8}$

Za $x \geq 3$ je x+3 < 3x-1 pa $\dfrac{x+3}{3x-1}$ ne može biti cjelobrojan.

Dva su dvoznamenkasta broja s traženim svojstvom : 15 i 24.

METODA PARNOSTI - sastoji se u tome da se u zadanoj diofantskoj jednadžbi odredi parnost jedne od nepoznanica i na temelju toga zaključuje ima li jednadžba cjelobrojno rješenje ili ne.

PRIMJER 11. Dokažimo da linearna jednadžba $(n^2 + n + 2)x + 2y = 1$ nema cjelobrojno rješenje (x,y) ni za jedan cijeli broj n. (natjecanje,1988. 1.r.)

Rj. (n (n+1) + 2) x + 2y = 1 Za svaki cijeli broj n broj n(n+1) je paran broj, pa je koeficijent uz x paran.
Ako su x i y cijeli brojevi pribrojnici (n(n+1) + 2)x i 2y na lijevoj strani jednadžbe su parni brojevi i cijela lijeva strana je paran broj i ne može biti jednaka 1.
Dakle ni za jedan cijeli broj n ne postoje cijeli brojevi x i y koji zadovoljavaju jednadžbu.

METODA POSLJEDNJE ZNAMENKE - sastoji se u tome da se u zadanoj diofantskoj jednadžbi odrede posljednje znamenke brojeva na lijevoj i desnoj strani i da se na temelju toga izvede zaključak ima li jednadžba cjelobrojno rješenje ili ne.

PRIMJER 12. Riješimo u skupu cijelih brojeva jednadžbu $6x^2 - 5y = 2013$

Rj. Ako je x cijeli broj, x^2 završava jednom od znamenki 0,1,4,5,6 ili 9, a $6x^2$ jednom od znamenki 0, 4 ili 6.
Ako je y cijeli broj, broj 5y završava sa 0 ili sa 5. Dakle $6x^2 - 5y$ može završavati jednom od znamenki 0,1,4,5,6 ili 9. Kako broj 2013 završava znamenkom 3, zaključujemo da ne postoje cijeli brojevi x i y koji zadovoljavaju zadanu jednadžbu.

PRIMJER 13. Riješimo u skupu cijelih brojeva jednadžbu $x^4 + y^4 = 1223334444 ....999999999$

Rj. x^2 i y^2 završavaju sa 0, 1, 4, 5, 6 ili 9 x^4 i y^4 završavaju sa 0, 1, 5 ili 6
Dakle, $x^4 + y^4$ može završavati sa 0, 1, 2, 5, 6 ili 7 , tj. ne može završavati sa 9.

ZADACI ZA VJEŽBU:

ZADATAK 1. Određeni broj izletnika smjesti se u 5 autobusa i krene na put. U autobuse su raspoređeni ravnomjerno, ali najviše do 54. Kada izletnici stignu do željezničke postaje, tu im se pridruži još 7 putnika pa se sada svi, opet ravnomjerno rasporede u 14 vagona. Koliko je izletnika bilo na tom izletu ?

Rj. x : broj izletnika u jednom autobusu $0 < x \leq 54$
y : broj izletnika u jednom vagonu 0 < y

5x + 7 = 14y
5x – 14y = - 7 Partikularna rješenja su : $x_0 = 7,\ y_0 = 3$
Rješenja jednadžbe su : x = 7 – 14 t, y = 3 – 5t $t \in$ **Z**

Kako je
$$0 < 7 - 14t \leq 54$$
$$-7 < -14t \leq 47 \qquad t = 0, -1, -2, -3$$
$$0{,}5 > t \geq -3{,}3$$

x= 7, y = 3 35+7 = 42 putnika x= 35 , y = 13 175+7 = 182 putnika
x= 21, y = 8 105+7 = 112 putnika x= 49, y = 18 245 + 7 = 252 putnika

ZADATAK 2. Igrajući pikado Ivica nekoliko puta pogodi desetku, isto toliko puta osmicu, nekoliko puta peticu, te tako skupi 99 bodova. Koliko je puta Ivica gađao ako nije nijednom promašio metu ?

Rj. x : broj pogodaka u desetku, broj pogodaka u osmicu
y : broj pogodaka u peticu

10x + 8x + 5y = 99
18x + 5y = 99 Partikularna rješenja su : $x_0 = -2$, $y_0 = 27$

Rješenja su . x = - 2 + 5t , y = 27 – 18t , $t \in$ **Z**
Kako mora biti - 2 + 5t > 0 i 27 – 18t > 0
t > 0,4 i t < 1,5

Samo je jedno rješenje t = 1, znači x = 3 i y = 9. Ivica je gađao 15 puta, tri puta deseticu, tri puta osmicu i devet puta peticu.

ZADATAK 3. Koliko cjelobrojnih točaka leži na pravcu 8x – 13y + 6 = 0 unutar pruge određene pravcima x = - 100 i x = 100 ?

Rj. 8x – 13y = - 6 Partikularna rješenja su : $x_0 = 9$, $y_0 = 6$.

Rješenja su : x = 9 – 13 t , y = 6 – 8t , $t \in$ **Z**

Kako mora biti - 100 < 9 – 13t < 100 , dobiva se 8,83 > t > - 7 . Znači t = 8,7,6,5,4,3,2,1,0,-1,-2,-3,-4,-5,-6 tj. ima 15 cjelobrojnih točaka.

(-95,-58), (-82,-50), (-69,-42),….

ZADATAK 4. Riješi jednadžbu 3x – 6y + 5z = 4

Rj. 3x – 6y = 4 – 5z $\Rightarrow$ $x - 2y = \dfrac{4-5z}{3}$ Broj 4- 5z mora biti djeljiv s 3, tj. oblika 4 – 5z = 3t

Dobivamo jednadžbu 5z + 3t = 4 čija su partikularna rješenja $z_0 = 2, t_0 = -2$
Zanima nas rješenje z = 2 + 3v , $v \in$ **Z**.

Uvrštavanjem dobivamo x – 2y = - 2 – 5y

ZADATAK 5. Riješimo u skupu prirodnih brojeva jednadžbu $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{xy} = 1$

Rj. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{xy} = 1 \Rightarrow y + x + 1 = xy \Rightarrow x - xy + y + 1 = 0 \Rightarrow x - xy + y - 1 + 2 = 0 \Rightarrow$

$$2 = xy - x + 1 - y \Rightarrow 2 = x(y-1) - (y-1) \Rightarrow 2 = (y-1)(x-1)$$

Mogući slučajevi dani su u tablici

X - 1	2	-2	1	-1
Y - 1	1	-1	2	-2

Moguća rješenja su u tablici

X	3	-1	2	0
Y	2	0	3	-1

Rješenja zadane jednadžbe zbog uvjeta da su x i y prirodni brojevi su : (3, 2) i (2, 3)

ZADATAK 6. Riješimo u skupu **Z** jednadžbu $x^4 + 2x^7 y - x^{14} - y^2 = 7$

Rj.

$$-x^{14} + x^9 - x^9 + x^7 y + x^7 y + x^4 + x^2 y - x^2 y - y^2 = 7$$
$$x^7(-x^7 + x^2 + y) + x^2(-x^7 + x^2 + y) - y(-x^7 + x^2 + y) = 7$$
$$(-x^7 + x^2 + y)(x^7 + x^2 - y) = 7$$

$-x^7 + x^2 + y$	7	- 7	1	- 1
$x^7 + x^2 - y$	1	- 1	7	-7

Zbrajanjem jednadžbi sustava dobivamo sljedeće :

1.) $2x^2 = 8$, $x^2 = 4$, $x = 2$, $x = -2$

2.) $2x^2 = -8$

3.) $2x^2 = 8$, $x = 2,\ x = -2$

4.) $2x^2 = -8$

Za x = 2 dobivamo y = 125 , za x = - 2 dobivamo y = -131 u prvom slučaju, a tako i u trećem.

Znači, jedina rješenja su (2, 125) i (- 2, - 131)

ZADATAK 7. Odredite parove cijelih brojeva x i y za koje vrijedi xy – 7x – y = 3.

Rj. xy – y = 3 + 7x Za x = 1 dobivamo 0 = 10 što je nemoguće.

Za $x \neq 1$ imamo $y = \dfrac{3+7x}{x-1} = \dfrac{7x-7+10}{x-1} = 7 + \dfrac{10}{x-1}$

$$y \in Z \Leftrightarrow 7 + \frac{10}{x-1} \in Z \Leftrightarrow \frac{10}{x-1} \in Z \Leftrightarrow x-1 \in \{1,-1,\ 2,-2,\ 5,-5,\ 10,-10\} \Leftrightarrow x \in \{2,0,3,-1,6,-4,11,-9\}$$

Rješenja su : (2, 17), (0, - 3), (3, 12), (-1, 2), (6,9), (- 4, 5), (11, 8), (- 9, 6)

ZADATAK 8. Nađite sve prirodne brojeve n za koje n + 2 dijeli $n^4 + 2$

Rj. Treba naći sve prirodne brojeve n za koje je i $\dfrac{n^4+2}{n+2}$ prirodan broj. Budući da je

$$\frac{n^4+2}{n+2} = \frac{n^4 + 2n^3 - 2n^3 - 4n^2 + 4n^2 + 8n - 8n - 16 + 16 + 2}{n+2}$$
$$= \frac{n^3(n+2) - 2n^2(n+2) + 4n(n+2) - 8(n+2) + 18}{n+2}$$
$$= \frac{(n+2)(n^3 - 2n^2 + 4n - 8) + 18}{n+2} = n^3 - 2n^2 + 4n - 8 + \frac{18}{n+2}$$

nužno je i dovoljno da je $\dfrac{18}{n+2}$ prirodan broj.

Uzimajući u obzir da je $n + 2 \geq 3$ slijedi da je n+2 $\in \{3,6,9,18\}$, odnosno n $\in \{1,4,7,16\}$

ZADATAK 9. Postoje li cijeli brojevi m i n koji zadovoljavaju jednadžbu $n^4 + 16m = 7993$?

Rj. Ako je n paran broj lijeva strana jednadžbe je parna, a kako je 7993 neparan , jednadžba nema rješenja.
Ako je n neparan broj, tj. oblika n = 2k+1 za neki cijeli broj k, uvrštavanjem u zadanu jednadžbu dobivamo :

$$(2k+1)^4 + 16m = 7993$$
$$(4k^2 + 4k + 1)^2 + 16m = 7993$$
$$16k^4 + 16k^2 + 1 + 32k^3 + 8k^2 + 8k + 16m = 7993$$
$$8(\, 2k^4 + 2k^2 + 4k^3 + k^2 + k) + 16m = 7992$$
$$2k^4 + 4k^3 + 3k^2 + k + 2m = 999$$
$$2(\, k^4 + 2k^3 + k^2 + m\,) + k^2 + k = 999$$
$$2(\, k^4 + 2k^3 + k^2 + m\,) + k(k+1) = 999$$

Kako je 999 neparan broj, a lijeva strana jednadžbe paran, zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

ZADATAK 10. U cijelim brojevima riješite jednadžbu $x^2 + 10y = 1234567$

Rj. Poznato je da kvadrat cijelog broja uvijek završava nekom od znamenaka 0, 1, 4, 5, 6 ili 9. Kako 10y završava znamenkom 0, slijedi da $x^2 + 10y$ može završavati nekom od znamenaka 0, 1, 4, 5, 6 ili 9. Budući da broj 1234567 završava znamenkom 7, slijedi da zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

ZADATAK 11. Nađite sva trojke cijelih brojeva (a, b, c) koje zadovoljavaju jednakost :

$$3\,(\, a - 3\,)^2 + 6b^2 + 2c^2 + 3b^2c^2 = 33$$

ZADATAK 12. Odredite broj $\overline{abcd}$ s ovim svojstvom :

$$\overline{cda} - \overline{abc} = 297$$
$$a + b + c = 23$$

ZADATAK 13. Dokažite da jednadžba $5x^2 - 4y^2 = 1999$ nema nijedno cjelobrojno rješenje.