

ZADACI ZA PRIPREMU POPRAVNOG ISPITA IZ MATEMATIKE
TREĆI RAZRED

1. UVOD U TRIGONOMETRIJU

1. Neka je $\sin t = -\frac{3}{5}$, $t \in \left\langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\rangle$. Izračunaj $\cos t$, $\operatorname{tg} t$ i $\operatorname{ctg} t$. Rj. $\cos t = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} t = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} t = -\frac{4}{3}$

2. Neka je $\operatorname{ctg} t = -\frac{12}{5}$, $t \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$. Izračunaj $\sin t$, $\cos t$ i $\operatorname{tg} t$. Rj. $\sin t = \frac{5}{13}$, $\cos t = -\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} t = -\frac{5}{12}$

3. Iz $\cos t = -\frac{7}{25}$, $t \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$ odredi $\sin t$, $\operatorname{tg} t$ i $\operatorname{ctg} t$. Rj. $\sin t = \frac{24}{25}$, $\operatorname{ctg} t = -\frac{7}{24}$, $\operatorname{tg} t = -\frac{24}{7}$

4. Izračunaj $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{ctg} t$ ako je $\operatorname{tg} t = \frac{5}{12}$, $t \in \left\langle \pi, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$. Rj. $\sin t = -\frac{5}{13}$, $\cos t = -\frac{12}{13}$, $\operatorname{ctg} t = \frac{12}{5}$

5. Izračunaj $\frac{1 - \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg} t}$ ako je $\cos t = \frac{9}{41}$, $t \in \left\langle \frac{15\pi}{2}, 8\pi \right\rangle$ Rj. $-\frac{49}{31}$

6. Izračunaj $\frac{1 + \sin t + \cos t}{1 - \sin t - \cos t}$ ako je $\operatorname{tg} t = \frac{20}{21}$, $t \in \left\langle \pi, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$. Rj. $-\frac{6}{35}$

7. Provjeri da li su sljedeće funkcije parne ili neparne :

a) $f(x) = \frac{1 + 4 \cos x}{x^4}$ b) $f(x) = \frac{1 + \cos^2 x}{\sin x}$ Rj. a) p b) n c) n d) p

c) $f(x) = \frac{x^3 - \operatorname{tg} x}{1 + \cos x}$ d) $f(x) = \frac{x - \operatorname{ctg}^3 x}{\sin x}$

8. Izračunaj : a) $4 \operatorname{ctg} \left(-\frac{29\pi}{4} \right) - \sin \left(-\frac{17\pi}{6} \right)$ Rj. a) $-\frac{7}{2}$

b) $4 \operatorname{tg} \left(-\frac{35\pi}{4} \right) - \cos \left(-\frac{17\pi}{3} \right)$ b) $\frac{7}{2}$

c) $\cos \left(-\frac{17\pi}{6} \right) - 3 \operatorname{tg} \left(-\frac{27\pi}{4} \right)$ c) $-3 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. ADICIJSKE FORMULE I FORMULE KOJE PROIZLAZE IZ ADICIJSKIH

9. Ako je $\sin x = \frac{24}{25}$, $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$ i $\cos y = -\frac{4}{5}$, $y \in \left\langle \pi, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$ izračunaj :

a) $\cos(x-y)$

b) $\sin(x+y)$

Rj. a) $-\frac{44}{125}$ b) $-\frac{3}{5}$

10. Ako je $\sin y = \frac{12}{13}$ i $\operatorname{ctgx} = -1$, $x, y \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$ izračunaj :

a) $\operatorname{tg}(x+y)$

b) $\operatorname{tg}(x-y)$

Rj. a) $\frac{17}{7}$ b) $\frac{7}{17}$

11. Pojednostavni : a) $\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right) =$

Rj. a) $\cos t$

b) $\cos^2 x - \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) =$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right)} =$

c) $\operatorname{tg} t$

12. Bez uporabe računala izračunaj :

a) $\sin \frac{11\pi}{12} + \sin \frac{7\pi}{12} =$

Rj. a) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

b) $\cos \frac{5\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} =$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\sin \frac{11\pi}{12} - \sin \frac{5\pi}{12} =$

c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

13. Iz $\sin x = \frac{3}{5}$, $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$ izračunaj $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$ i $\operatorname{ctg} 2x$.

Rj. $\sin 2x = -\frac{24}{25}$, $\cos 2x = \frac{7}{25}$

$\operatorname{tg} 2x = -\frac{24}{7}$, $\operatorname{ctg} 2x = -\frac{7}{24}$

14. Iz $\cos t = -\frac{8}{17}$, $t \in \left\langle \pi, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$ izračunaj $\sin \frac{t}{2}$, $\cos \frac{t}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$, $\operatorname{ctg} \frac{t}{2}$.

Rj. $\frac{5\sqrt{34}}{34}$, $-\frac{3\sqrt{34}}{34}$, $-\frac{5}{3}$, $-\frac{3}{5}$

15. Dokaži identitet : $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 1$

16. Neka je $\sin \alpha = \frac{9}{41}$, $\alpha \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Bez uporabe računala izračunaj $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$

Rj. $\frac{\sqrt{82}}{82}$, $\frac{1519}{1681}$, $\frac{720}{1519}$

17. Pojednostavni : $\cos^2 3x - \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + 3x\right)$ Rj. $\frac{3}{4} \cos 6x$

3. TRIGONOMETRIJSKE JEDNADŽBE I NEJEDNADŽBE

18. Riješi trigonometrijske jednadžbe : a) $4 \sin^2 x - 4 \cos x - 1 = 0$
 b) $3 \cos^2 x - 5 \cos x - 4 = 0$
 c) $\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0$
 d) $6 \cos^2 x - 5 \sin x - 2 = 0$
19. Riješi homogene trigonometrijske jednadžbe : a) $2 \cos^2 x + 3 \sin x \cos x + \sin^2 x = 0$
 b) $\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$
20. Riješi trigonometrijske jednadžbe uporabom formula pretvorbe : a) $\sin x + \sin 3x = 0$
 b) $\sin 3x = \cos 5x$
 c) $\cos 5x + \cos 3x = \cos 6x \cos 2x$
21. Riješi trigonometrijske nejednadžbe : a) $\sin x > 0$
 b) $\operatorname{tg} x < 0$
 c) $\cos x < \frac{\pi}{4}$
 d) $\sin x > \frac{1}{2}$

4. PRIMJENA TRIGONOMETRIJE

22. Riješi trokut ako je zadano :
 a) $\alpha = 63^\circ$, $a = 25 \text{ cm}$ i $b = 20 \text{ cm}$ Rj. $\beta = 45^\circ 28'$, $\chi = 71^\circ 32'$, $c = 26,6 \text{ cm}$
 b) $c = 14 \text{ cm}$, $\alpha = 40^\circ 12'$, $\beta = 40^\circ$ $a = 9,17 \text{ cm}$, $b = 9,13 \text{ cm}$, $\chi = 99^\circ 48'$
23. Izračunaj duljine stranica i kutove trokuta ako je zadano : $\alpha = 108^\circ$, $\beta = 30^\circ$ i $v_c = 6 \text{ cm}$
 Rj. $\chi = 42^\circ$, $a = 12$, $b = 6,31$, $c = 8,44$
24. Riješi trokut ako je zadano .
 a) $a = 21 \text{ cm}$, $c = 15 \text{ cm}$, $\beta = 21^\circ$ Rj. a) $b = 8,82$ $\alpha = 121^\circ 29'$, $\chi = 37^\circ 30'$
 b) $b = 17,1 \text{ cm}$, $c = 35 \text{ cm}$, $\alpha = 80^\circ 20'$
 c) $a = 26,5 \text{ cm}$, $b = 14,1 \text{ cm}$, $c = 14,7 \text{ cm}$
25. Visina spuštena iz vrha C nekog trokuta na stranicu duljine $c = 10 \text{ cm}$, ima duljinu $v_c = 5 \text{ cm}$. Odredite duljine stranica a i b tog trokuta ako je zadan kut $\alpha = 62^\circ 10'$.
 Rj. $a = 8,898$ $b = 5,654$
26. Izračunaj površinu trokuta ako je zadano $\alpha = 32^\circ$, $\chi = 77^\circ$, $a = 14 \text{ cm}$.
 Rj. $P = 170,38 \text{ cm}^2$

27. Izračunaj kut χ trokuta ako su $a = 7,25$ cm, $b = 3,6$ cm duljine njegovih stranica, a $P = 10$ cm^2 površina.
Rj. 50°
28. Izračunaj duljine stranica paralelograma kojemu su $e = 10$ cm i $f = 30$ cm duljine dijagonala, a $P = 50$ cm^2 površina.
Rj. $b = 10,42$ $a = 19,78$
29. Izračunaj površinu paralelograma čija je duljina kraće dijagonale 20 cm, duljina jedne stranice 21 cm, a šiljasti kut je 70° .
Rj. 331,62
30. Površina jednakokrakog trapeza je $P = 37,8$ cm^2 . Ako je duljina visine na osnovicu 6,72 cm a kut između kraka i osnovice $\alpha = 60^\circ$, nađi duljine paralelnih stranica.
Rj. $a = 9,505$ $c = 1,745$

5. VEKTORI

31. Vektor $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ ima početak u točki $A(-2, 3)$. Nađi njegov kraj.
Rj. $B(0, 6)$
32. Vektor $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ ima kraj u točki $B(4, 1)$. Nađi njegov početak.
Rj. $A(5, -1)$
33. Odredi koordinate točke B na osi apscisa, ako je $|\vec{AB}| = 5$ i $A(3, -4)$.
Rj. $B(0, 0)$, $B(6, 0)$
34. Odredi koordinate točke A na osi ordinata ako je $|\vec{AB}| = 13$ i $B(12, 1)$.
Rj. $A(0, 6)$, $A(0, -4)$
35. Zadana je točka $A(-3, -2)$. Odredi ordinatu y točke $B(2, y)$ tako da je $|\vec{AB}| = \sqrt{29}$
Rj. $y = 0$, $y = 4$
36. Zadan je trokut ABC ($A(-3, -1)$, $B(1, -4)$, $C(3, 5)$). Odredi $\vec{AB} \circ \vec{AC}$
Rj. 6
37. Ako je $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ nađi vektor \vec{b} okomit na vektor \vec{a} ako je $|\vec{b}| = 2\sqrt{13}$.
38. Zadan je vektor $\vec{AB} = 3\vec{i} - \vec{j}$ i $A(-1, 3)$. Nađi koordinate točke C tako da vrijedi:
 $\vec{AC} = 2\vec{AB}$ $\vec{AC} = -2\vec{AB}$

39. Vrhovi trokuta ABC su u točkama A (4, 2), B (1, 5) i C (-1, -2). Izračunaj :

- a) vektore \vec{AB} i \vec{AC}
- b) duljine tih vektora
- c) kut između tih vektora

40. Prikaži vektor $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j}$ i $\vec{b} = \vec{i} + 8\vec{j}$

6. PRAVAC

41. Pravac prolazi točkama A (3, y) i B (-2, 3). ako mu je koeficijent smjera -2 nađi ordinatu točke A.

Rj. $y = 13$

42. Pravac prolazi točkom T (-3, 1), a s koordinatnim osima zatvara trokut površine 8. Nađi njegovu jednadžbu.

Rj. $x - 19y + 12 = 0$
 $x - y + 4 = 0$

43. odredi jednadžbu pravca koji prolazi točkom T (2, 1) i okomit je na pravac $y = 3x - 1$.

Rj. $x + 3y - 5 = 0$

44. Odredi jednadžbu pravca na kojem leži visina v_a trokuta ABC (A (-3, -1), B (1, -2), C (1, 4)).

Rj. $y = -1$

45. Zadan je trokut ABC s vrhovima A (-1, -1), B (3, 3) i C (-4, -2). Kolika je duljina visine iz vrha C ?

Rj. $\sqrt{2}$

46. Odredi kut između pravaca $3x - 5y + 1 = 0$ i $5x - 3y + 1 = 0$.

Rj. $15^\circ 55' 39''$

47. Nađi udaljenost između paralelnih pravaca $2x - y + 3 = 0$ i $4x - 2y + 5 = 0$.

Rj. $\frac{\sqrt{5}}{10}$

48. Nađi površinu kvadrata kojemu je jedan vrh u točki A (2, 1), a stranica BC leži na pravcu $3x - 4y - 1 = 0$.

Rj. $\frac{1}{25}$

49. Nađi površinu kvadrata čija jedna stranica leži na pravcu $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$, a središte je u točki S (-1, -1).

Rj. $\frac{484}{13}$

50. Pravac prolazi točkama A (-6, 4) i B (4, y), te je paralelan s pravcem $4x + 3y - 5 = 0$. Odredi ordinatu točke B.

7. KRUŽNICA

51. Nađi jednađžu kružnice koja je koncentrična kružnici $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ čiji je polumjer dvostruko veći od polumjera zadane kružnice.

$$\text{Rj. } (x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$$

52. Odredi jednađžu kružnice opisane trokutu ABC (A(-3, 0), B(0, 4), C(-4, 2)).

$$\text{Rj. } \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{25}{4}$$

53. Odredi jednađže tangenata povučenih iz točke T(3, -1) na kružnicu $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 3 = 0$.

$$\text{Rj. } 4x - y - 13 = 0, x + 4y + 1 = 0$$

54. Odredi jednađže tangenata na kružnicu $x^2 + y^2 = 16$ koje su paralelne s pravcem AB(A(0,3), B(12,8)).

$$\text{Rj. } 5x - 12y + 52 = 0, 5x - 12y - 52 = 0$$

55. Kako glasi jednađža kružnice kojoj je dužina AB(A(1, -4), B(-3, 6)) promjer ?

$$\text{Rj. } (x-5)^2 + (y-4)^2 = 10$$

56. Napiši jednađžu kružnice koja prolazi točkama A(-1,2), B(3,6) i kojoj je središte na osi x.

$$\text{Rj. } (x-5)^2 + y^2 = 40$$

57. Kako glasi jednađža kružnice kojoj je polumjer $r = \sqrt{20}$ i koja prolazi točkama A(-2, 4) i B(4,2).

$$\text{Rj. } x^2 + y^2 = 20, (x-2)^2 + (y-6)^2 = 20$$

8. KRIVULJE DRUGOG REDA

58. Odredi jednađžu elipse koja prolazi točkama A(9,4) i B(12,3).

$$\text{Rj. } \frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{25} = 1$$

59. Odredi jednađžu elipse koja prolazi točkom T(-4, -1) i ima malu poluos jednaku 3.

$$\text{Rj. } 9x^2 + 18y^2 = 162$$

60. Nađi jednađžu elipse ako je zadano $e = 6$ i $p = \frac{32}{5}$

$$\text{Rj. } 16x^2 + 25y^2 = 1600$$

61. Nađi jednađžu hiperbole koja prolazi točkom T(-6, -1), a velika poluos joj je jednaka 3.

$$\text{Rj. } x^2 - 27y^2 = 9$$

62. Nađi jednadžbu hiperbole koja prolazi točkom $T(2\sqrt{3}, -2)$, a žarišta su joj u točkama $(-\sqrt{6}, 0)$ i $(\sqrt{6}, 0)$.

$$\text{Rj. } x^2 - 2y^2 = 4$$

63. Nađi jednadžbu hiperbole kojoj su žarišta u točkama $(-15, 0)$ i $(15, 0)$, a pravci $y = \pm \frac{1}{2}x$ su njezine asimptote.

$$\text{Rj. } x^2 - 4y = 180$$

64. Kako glasi jednadžba parabole koja prolazi točkom $M(2, 4)$.

$$\text{Rj. } y^2 = 8x$$

65. Parabola $y^2 = 2px$ ima žarište u točki $(3, 0)$. Kolika je duljina tetive AB ako je $A\left(\frac{1}{6}, y < 0\right)$ i $B(6, y > 0)$?

$$\text{Rj. } t = \frac{\sqrt{2989}}{6}$$

66. Nađi jednadžbu tangente povučene iz točke $T\left(10, \frac{1}{2}\right)$ na elipsu $4x^2 + 25y^2 = 100$

$$\text{Rj. } 3x - 10y - 25 = 0, x + 6y - 13 = 0$$

67. Odredi one tangente hiperbole $x^2 - 9y^2 = 16$ koje su paralelne sa pravcem $5x - 9y = 0$

$$\text{Rj. } 5x - 9y + 16 = 0, 5x - 9y - 16 = 0$$

68. Kako glasi jednadžba hiperbole kojoj je pravac $4x - 4y - 10 = 0$ tangenta, a žarišta su joj u točkama $(-5, 0)$ i $(5, 0)$?

$$\text{Rj. } x^2 - 4y^2 = 20$$

69. Kako glasi jednadžba hiperbole kojoj su pravci $5x - 6y - 16 = 0$ i $13x - 10y - 48 = 0$ tangente ?

$$\text{Rj. } x^2 - 4y^2 = 16$$

70. Nađi kut između tangenata povučениh iz točke $T(-3, 1)$ na parabolu $y^2 = 12x$

$$\text{Rj. } 90^\circ$$